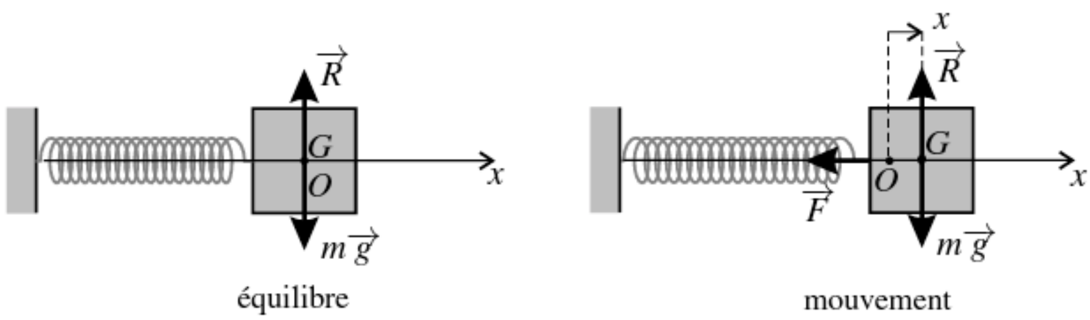
Chapitre 4 : Oscillateurs libres

1. Oscillateurs harmoniques

1.1. *Exemple mécanique*

1.1.a. Description du problème

Soit une masse m accrochée à un ressort se déplaçant sans frottement le long d'une tige horizontale. On note G son centre d'inertie dont la position est repérée par l'abscisse x, l'origine O de l'axe horizontal coïncidant avec la position d'équilibre.



1.1.b. Force de rappel d'un ressort

Un ressort est toujours caractérisé par :

- sa constante de raideur k (en $N.m^{-1}$)
- sa longueur à vide l_0 (en m) qui est la longueur du ressort lorsque celui-ci n'est pas étiré ou comprimé

Le ressort exerce sur la masse un force de rappel horizontale telle que :

$$\boxed{\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}}$$

où $\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort ($\Delta l > 0$ pour un ressort étiré, $\Delta l < 0$ pour un ressort comprimé). Cette loi est appelée loi de Hooke.

Pour le cas étudié :

- Un ressort étiré ($\Delta l > 0$) correspond à

$$\overrightarrow{\Delta l} = \Delta l \times \overrightarrow{u_x}$$

On peut donc écrire :

$$\vec{F} = -k\Delta l\overrightarrow{u_x} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_x}$$

Pour vérifier que l'on ne s'est pas trompé, on peut effectuer le raisonnement suivant : comme $\vec{F}$ est une force de rappel, elle s'oppose au mouvement de la masse vis à vis de la position d'équilibre ; elle est donc orienté suivant $-\overrightarrow{u_x}$ lorsque le ressort est étiré ce qui correspond bien à l'expression obtenue.

- à l'équilibre, on a

$$l_{eq} = l_0$$

soit

$$l - l_0 = l - l_{eq} = x$$

et donc

$$\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$$

1.1.c. Équation différentielle

Pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse, on applique la deuxième loi de Newton à cette dernière.

Système : masse assimilée au point matériel G de masse m
Référentiel : laboratoire supposé galiléen
B.A.M.E :

- poids $m\vec{g}$
- réaction de la tige $\overrightarrow{R_N}$
- force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$

On a :

$$m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F}$$

Le centre d'inertie se déplaçant parallèlement à l'axe (Ox), on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} = -mg\overrightarrow{u_z} + R_N\overrightarrow{u_z} - kx\overrightarrow{u_x}$$

Par projection suivant l'axe (Ox), on obtient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Remarque : la projection sur l'axe (Ox) revient à un produit scalaire de toute l'équation vectorielle par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_x} = -m\overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{u_x} + R_N\overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{u_x} - kx\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_x}$$

Comme on a

$$\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_x} = 1 \text{ et } \overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{u_x} = 0$$

On retrouve l'équation précédente.

Finalement, on obtient :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Cette relation est appelée équation du mouvement du centre d'inertie G de la masse.
On peut poser

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

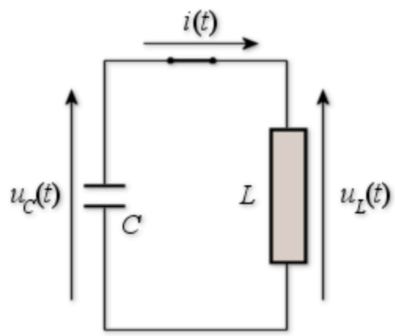
L'équation du mouvement devient alors

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

1.2. *Exemple électrique*

1.2.a. Description du problème

Soit un circuit comprenant un condensateur préalablement chargé sous une tension E_0, de capacité C, et une bobine d'inductance L. L'interrupteur ouvert pour $t<0$ se ferme à $t=0$. L'orientation retenue pour le courant implique une convention récepteur pour la bobine et une convention générateur pour le condensateur.



1.2.b. Équation différentielle

On a :

$$L\frac{di}{dt} = u_L(t) = u_C(t)$$

Par ailleurs, le condensateur étant ici en convention générateur, on a :

$$i(t) = -C\frac{du_C}{dt}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C(t) = 0$$

En posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, on trouve finalement :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

1.3. *Généralisation*

Soit un dispositif physique dont l'évolution dans le temps est décrite par une grandeur notée $s(t)$. On dira qu'il s'agit d'un oscillateur harmonique si et seulement si l'équation différentielle à laquelle obéit $s(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\ddot{s}(t) = -\omega_0^2 s(t)}$$

où ω_0 est une constante caractéristique du dispositif.
Cette équation est appelée équation de l'oscillateur harmonique.

1.4. Solutions générales de l'équation différentielle

Soit un oscillateur harmonique dont l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{s}(t) = -\omega_0^2 s(t)$$

Les solutions $s(t)$ de cette équation sont des fonctions sinusoïdales pouvant s'écrire :

- $\boxed{s(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)}$ ou
- $\boxed{s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ ou
- $\boxed{s(t) = A\sin(\omega_0 t + \psi)}$

où A, C, D, φ et ψ sont des constantes déterminées à l'aide des conditions initiales.

Vérification : on a

$$\dot{s}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t) + D\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{s}(t) = -C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - D\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

On a bien :

$$\ddot{s}(t) = -\omega_0^2 s(t)$$

Les trois formes d'écriture sont équivalentes ce qui implique des relations entre les différentes constantes.

En effet, on peut écrire

$$C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) = \sqrt{C^2 + D^2}\left[\frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}\sin(\omega_0 t)\right]$$

ψ peut alors être défini par les relations trigonométriques :

$$\sin(\psi) = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \text{ et } \cos(\psi) = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

On vérifie bien que :

$$\sin(\psi) < 1,\ \cos(\psi) < 1 \text{ et } \cos^2(\psi) + \sin^2(\psi) = 1$$

Or, on sait que

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Donc

$$\begin{aligned} C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) &= \sqrt{C^2 + D^2}\left[\sin(\psi)\cos(\omega_0 t) + \cos(\psi)\sin(\omega_0 t)\right] \\ &= \sqrt{C^2 + D^2}\sin(\omega_0 t + \psi) \end{aligned}$$

Par identification avec la troisième expression, on obtient que

$$A = \sqrt{C^2 + D^2}$$

Par ailleurs :

$$A\sin(\omega_0 t+\psi)=A\cos\left(\omega_0 t+\psi-\frac{\pi}{2}\right)$$

On retrouve la seconde expression en prenant

$$\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$$

Peu importe l'expression retenue, une solution $s(t)$ de l'équation d'un oscillateur harmonique correspond à un signal sinusoïdal.

1.5. Étude d'un premier exemple de résolution - Considérations énergétiques

On reprend le dispositif mécanique étudié dans le premier paragraphe dont l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2 x(t)$$

On considère les conditions initiales suivantes : à $t=0$, la masse est lâchée sans vitesse initiale après avoir étiré le ressort de manière à écarter la masse d'une distance X_0 de sa position d'équilibre. On peut alors écrire :

$$x(0)=X_0 \text{ et } \dot{x}(0)=0$$

On choisit d'écrire la solution sous la forme :

$$x(t)=C\cos(\omega_0 t)+D\sin(\omega_0 t)$$

soit

$$\dot{x}(t)=-C\omega_0\sin(\omega_0 t)+D\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

On a :

$$x(0)=C=X_0$$

et

$$\dot{x}(0)=D\omega_0=0$$

Finalement, nous obtenons :

$$x(t)=X_0\cos(\omega_0 t)$$

On sait que l'énergie cinétique de la masse est définie par : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$

soit : $E_c=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$

Comme on a : $\dot{x}(t)=-X_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

On obtient ainsi :

$$E_c=\frac{1}{2}m\left[-X_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\right]^2=\frac{X_0^2 k}{2}\sin^2(\omega_0 t)$$

puisqu'on a

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

Nous verrons par la suite qu'on peut associer à la force de rappel d'un ressort une énergie potentielle dite « élastique » d'expression

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2(t)$$

On a alors :

$$E_p = \frac{1}{2} k\left[X_0 \cos(\omega_0 t)\right]^2 = \frac{X_0^2 k}{2}\cos^2(\omega_0 t)$$

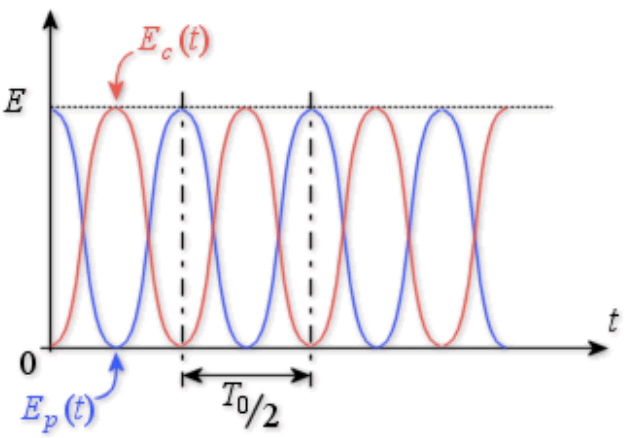
L'énergie mécanique d'un système étant définie par la relation :

$$E_m = E_c + E_p$$

On obtient finalement

$$E_m = \frac{X_0^2 k}{2} = \frac{X_0^2 m\omega_0^2}{2} = E$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique est donc constante ; on dit qu'elle se conserve au cours du temps.



Cette propriété peut se généraliser à tous les oscillateurs harmoniques et fournit un moyen de vérifier la cohérence de la solution obtenue.

1.6. Étude d'un second exemple

On reprend le dispositif électrique du circuit (L,C).
Les conditions initiales sont obtenues en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant dans la bobine. On a alors :
$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_0$ et $i(0^+) = i(0^-) = 0$
Or, on a :

$$\frac{i(t)}{C} = -\frac{du_C}{dt}$$

Donc :

$$u_C(0) = E_0 \text{ et } \frac{du_C}{dt}(0) = 0$$

$$u_C(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$$

soit

$$\frac{du_C}{dt}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t) + D\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

On a :

$$u_C(0) = C = E_0$$

et

$$\frac{du_C}{dt}(0) = D\omega_0 = 0$$

Finalement, nous obtenons :

$$u_C(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$$

On peut s'intéresser aux énergies stockées dans le condensateur et la bobine.

$$\begin{cases} E_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) = \frac{1}{2}CE_0^2\cos^2(\omega_0 t) \\ E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_C}{dt}(t)\right)^2 = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2E_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CE_0^2\sin^2(\omega_0 t) \end{cases}$$

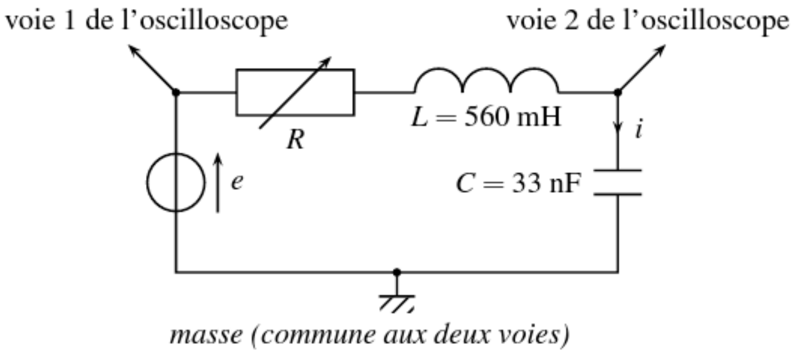
On obtient donc bien une conservation de l'énergie électrique totale contenue dans le circuit :

$$E_{tot} = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}CE_0^2$$

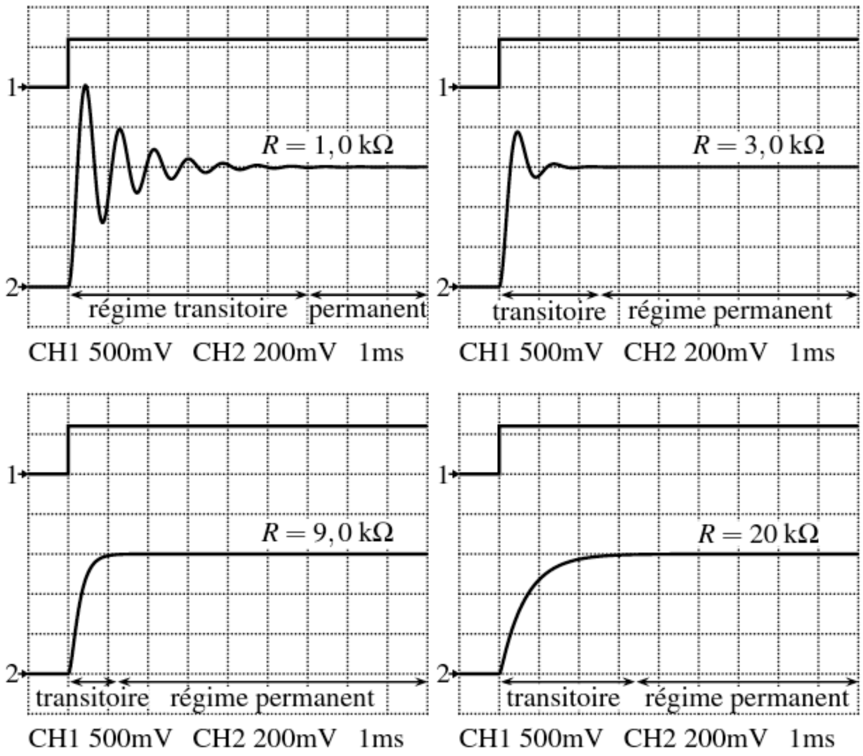
2. Observations expérimentales : réponse indicielle d'un circuit (R,L,C)

On considère le montage suivant constitué :
- d'un générateur basse fréquence (GBF)
- d'un condensateur de capacité C initialement déchargé ($C = 33\ nF$)
- d'une résistance R ($R = 1\ ; 3\,; 9\,; 20\ k\Omega$)
- d'une bobine d'inductance L ($L = 560\ mH$)

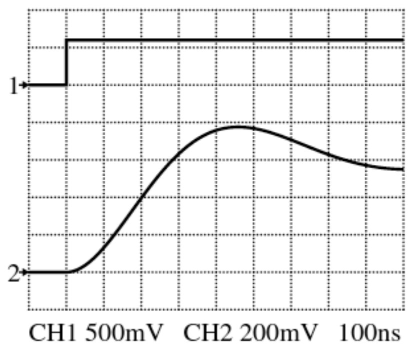
Les tensions aux bornes du générateur et du condensateur sont visualisées simultanément à l'aide d'un oscilloscope.



A l'instant $t = 0$, la tension à vide $e(t)$ passe brutalement de la valeur nulle à une tension positive (ici $600\ mV$). On observe alors la réponse indicielle du circuit aux bornes du condensateur.

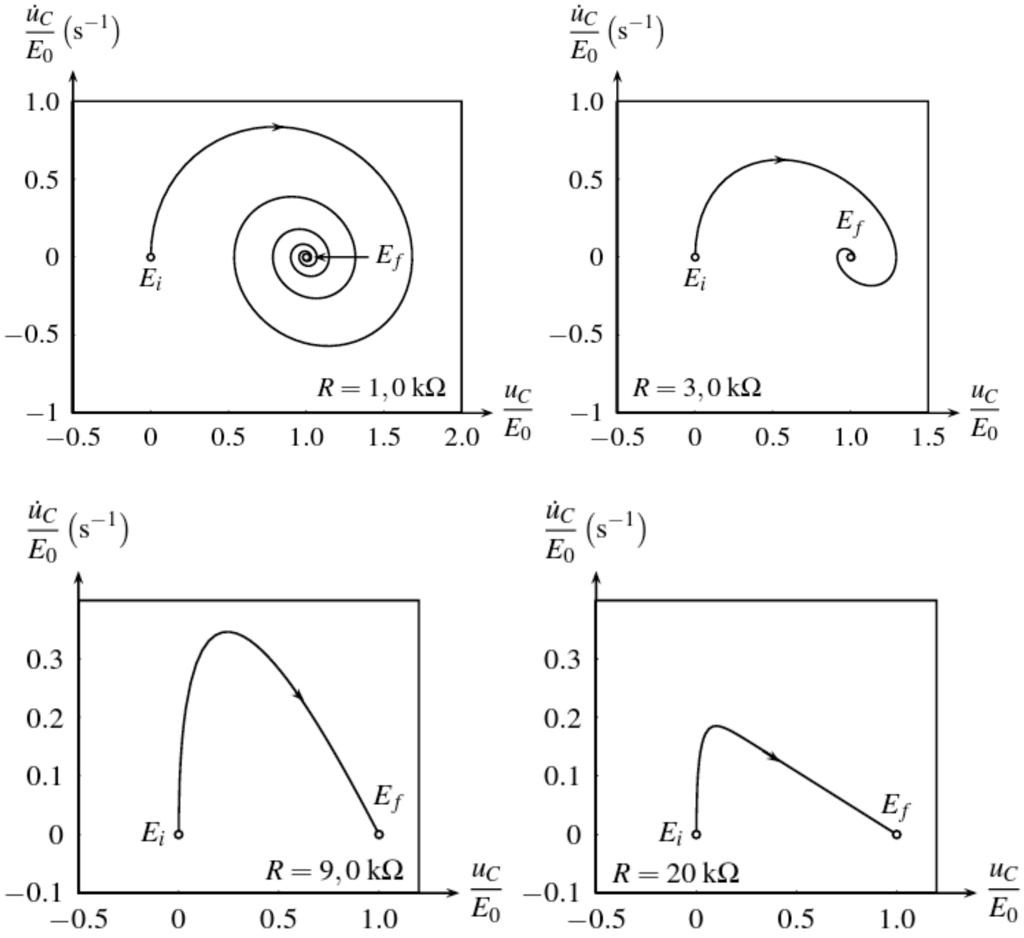


On effectue alors les observations suivantes :
- la tension de sortie du circuit tend vers une tension constante, ici égale à la tension imposée par le GBF
- en régime permanent (ou établi), la réponse du circuit est de même forme que l'entrée, ici constante
- le régime transitoire dépend de la valeur de la résistance ; il peut présenter des oscillations ou non.
- la durée du régime transitoire commence par diminuer avec R puis augmente après être passée par un minimum.
- comme illustré ci-dessous, la courbe de réponse accepte une tangente nulle à l'origine.



On peut également examiner les portraits de phase obtenus de manière expérimentale.

Remarque : on trace $\dfrac{\dot{u}_C}{E_0} = f\left(\dfrac{u_C}{E_0}\right)$ afin de rendre l'allure des courbes indépendante de E_0.



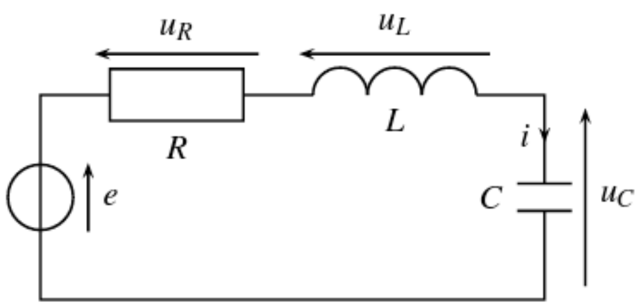
> Quelle que soit la valeur de R, les états initial et final sont identiques. En revanche, l'aspect du portrait de phase diffère suivant que l'on a ou non des oscillations durant le régime transitoire. Lorsque le circuit est oscillant, le portrait de phase tourne autour de l'état final. Il effectue d'autant moins de tour que R est grande. Lorsque le circuit n'est plus oscillant, le portrait de phase ne tourne plus autour de l'état final.

Nous allons montrer qu'il est possible de retrouver ces résultats par le calcul.

3. Oscillateurs libres amortis

3.1. Exemple électrique

On commence par simplifier le montage précédent en le modélisant de la manière suivante :



La résistance totale du circuit (tenant compte de celle du générateur) est donnée par :

$$R_{totale} = R + R_g \simeq R \text{ car } R_g \ll R.$$

La tension $e(t)$ aux bornes du générateur a pour expression :

$$e(t)\begin{cases} 0 \; si \; t<0 \\ E_0 \; si \; t>0 \end{cases}$$

La loi des mailles s'écrit ainsi :

$$e(t)-R\times i(t)-u_C(t)-u_L(t)=0$$

Or, les lois courant-tension pour le condensateur et la bobine donnent :

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L(t)=L\frac{di}{dt}$$

Donc :

$$e(t)-R\times C\frac{du_C}{dt}-u_C(t)-L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right)=0$$

Soit, pour $t>0$, on a :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C(t)=E_0$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On dit alors du circuit étudié qu'il s'agit d'un circuit linéaire du second ordre.

3.2. Exemple mécanique

On reprend le dispositif pris en exemple pour l'oscillateur harmonique mais en considérant désormais que le système est soumis à des frottements modélisés par la force :

$$\vec{f}=-\alpha\vec{v}$$

Système : masse assimilée au point matériel G de masse m
Référentiel : laboratoire supposé galiléen
B.A.M.E :

- poids $m\vec{g}$
- réaction de la tige $\overrightarrow{R_N}$
- force de rappel du ressort $\vec{F}=-kx\overrightarrow{u_x}$
- Force de frottements $\vec{f}=-\alpha\vec{v}$

$$m\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}=m\vec{g}+\overrightarrow{R_N}+\vec{F}+\vec{f}$$

Le centre d'inertie se déplaçant parallèlement à l'axe (Ox), on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x}=-mg\overrightarrow{u_z}+R_N\overrightarrow{u_z}-kx\overrightarrow{u_x}-\alpha\frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}$$

Par projection sur l'axe (Ox) et division par k, on obtient finalement :

$$\frac{m}{k}\ddot{x}+\frac{\alpha}{k}\dot{x}+x=0$$

3.3. Généralisation - Mise sous forme canonique

D'une manière générale, l'équation différentielle à laquelle obéit la réponse $s(t)$ d'un oscillateur amorti peut être mise sous l'une des formes suivantes appelées forme canonique :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds}{dt}+s(t)=f(t)} \text{ ou } \boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds}{dt}+s(t)=f(t)}$$

avec :
- ω_0 : pulsation caractéristique (ou propre) du circuit (en $rad.s^{-1}$)
- ξ : facteur d'amortissement (sans dimension)
- $f(t)$: second membre
- $Q=\dfrac{1}{2\xi}$: facteur de qualité (sans dimension)

Dans notre cas (circuit électrique), nous obtenons :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \;;\; \xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \;;\; f(t)=E_0$$

3.4. Résolution de l'équation différentielle

✓ Résolution de l'équation homogène

On écrit tout d'abord l'équation caractéristique :

$$\frac{1}{\omega_0^2}r^2+\frac{2\xi}{\omega_0}r+1=0 \Leftrightarrow r^2+2\xi\omega_0 r+\omega_0^2=0$$

On écrit le discriminent : $\Delta=4\omega_0^2\left(\xi^2-1\right)$

Le signe de Δ dépend donc de la valeur de ξ ; on distingue ainsi trois cas

- $\Delta<0$ ($\xi<1$ ou $Q>\frac{1}{2}$) : on a alors un régime transitoire pseudo-périodique présentant des oscillations amorties. On admet que l'on a alors :

$$\boxed{s_h(t)=e^{-\omega_0\xi t}\left[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right]}$$

avec $\omega=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. ω, appelé pseudo-pulsation, est la pulsation apparente des oscillations amorties observées durant le régime transitoire.

- $\Delta>0$ ($\xi>1$ ou $Q<\frac{1}{2}$) : on a alors un régime transitoire apériodique car il ne présente aucune oscillation (l'amortissement étant trop important). On admet que l'on a alors :

$$\boxed{s_h(t)=e^{-\omega_0\xi t}\left[Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}\right]}$$

avec $\omega=\omega_0\sqrt{\xi^2-1}$.

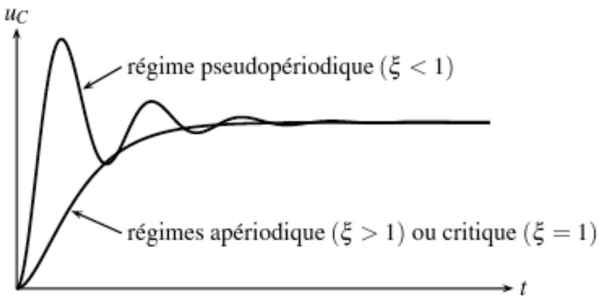
- $\Delta=0$ ($\xi=1$ ou $Q=\frac{1}{2}$) : ce cas correspond au cas limite entre les régimes pseudo-périodique et apériodique ; on parle de régime critique. On admet que l'on a alors :

$$\boxed{s_h(t)=(At+B)e^{-\omega_0\xi t}}$$

✓ Recherche d'une solution particulière
On cherchera toujours une solution particulière de même nature que le second membre.

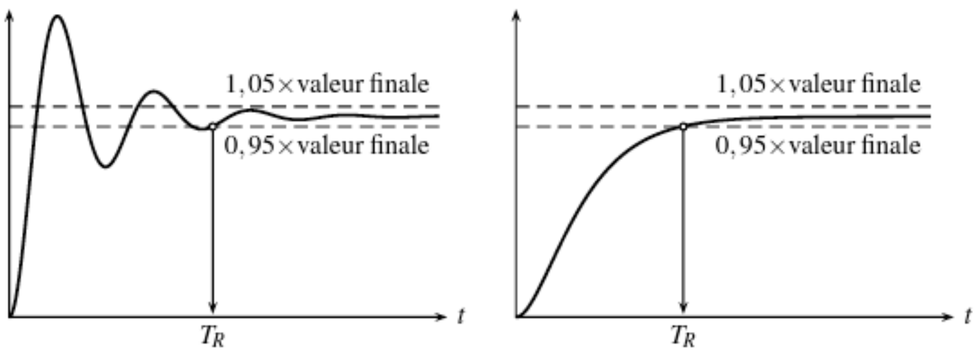
3.5. Représentation graphique

Le tracé de la fonction $u_C(t)$ est en accord avec les résultats expérimentaux obtenus au paragraphe précédent.

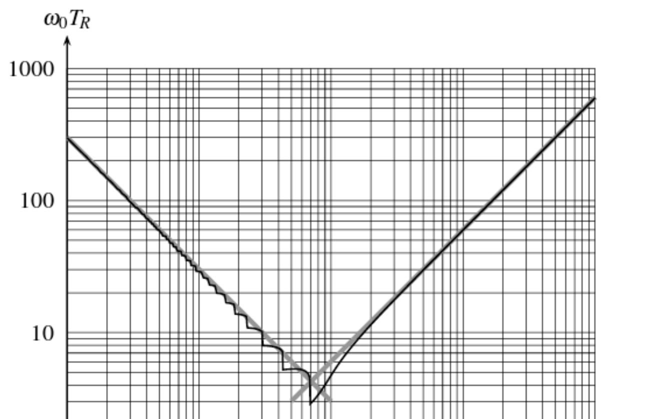


On peut alors effectuer les remarques suivantes :

- la tension aux bornes du condensateur tend vers une valeur finale constante égale à E_0. La courbe admet par conséquent une asymptote horizontale.
- la fin du régime transitoire peut être définie comme l'instant t_0 où le système atteint sa valeur finale à 5% près, le signal devant alors resté compris entre $0,95$ et $1,05$ fois la valeur finale. On a alors :



On peut examiner l'évolution de la durée du régime transitoire en fonction du facteur d'amortissement.



Le temps de réponse minimum est obtenu pour $\xi = 0,69$ (régime pseudo-périodique).

3.6. Bilan énergétique

On part de l'équation différentielle obtenue pour la réponse du circuit $u_C(t)$, que l'on multiplie par l'intensité du courant dans le circuit $i(t)$:

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}\times i(t)+RC\frac{du_C}{dt}\times i(t)+u_C(t)\times i(t)=e(t)\times i(t)$$

Comme la loi courant-tension du condensateur s'écrit :

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

on obtient :

$$L\left(\frac{di}{dt}\times i(t)\right)+Ri^2(t)+C\left(u_C(t)\times\frac{du_C}{dt}\right)=e(t)\times i(t)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right)+Ri^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{Cu_C^2}{2}\right)=e(t)\times i(t)$$

On a :

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right)$: puissance reçue par la bobine
- Ri^2 : puissance dissipée par effet Joule par le conducteur ohmique
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{Cu_C^2}{2}\right)$: puissance reçue par le condensateur
- $e(t)\times i(t)$: puissance cédée par le générateur

Le bilan énergétique permet donc de vérifier qu'à tout instant, on a :

$$p_{générateur}(t)=p_{bobine}(t)+p_{Résistance}(t)+p_{condensateur}(t)$$